Über das Rumhängen in der Nähe Schwarzer Löcher

Kurt Rinnert

26. September 1997

Fragestellung

Wir wollen das Problem untersuchen, ob eine humanoide Besatzung eines Raumschiffs es überleben könnte sich (nach Bordzeit) einen Monat so nah an einem Schwarzen Loch aufzuhalten, daß auf ihrem weit entfernten Heimatplaneten 12000 Jahre vergangen sind.

Dabei ist unter "weit entfernt" zu verstehen, daß sich der Heimatplanet in einem Inertialsystem (im Sinne der SRT) befindet; also, daß dort die Minkowskimetrik gilt:

$$g_{\mu\nu}\left(x_{\text{Heimat}}\right) = \eta_{\mu\nu} = diag\left(1, -1, -1, -1\right)$$

Annahmen

Im folgenden werden wir eine ganze Reihe von Abschätzungen machen, die alle von der Voraussetzung ausgehen, daß sich das Raumschiff in guter Näherung direkt am Ereignishorizont (Schwarzschildradius r_s) befindet. Diese Voraussetzung müssen wir also zunächst etablieren. Es wird sich zeigen, daß die Entfernung des Raumschiffs vom Schwarzen Loch, ausgedrückt in Einheiten von r_s, die zum Erreichen der gewünschten Zeitverzögerung notwendig ist, *nicht* von der Masse des Schwarzen Loches abhängt.

Mit der Zeitkoordinate $x_0 = ct$ ist das Eigenzeitintervall an Bord des Raumschiffs:

$$d\tau = \sqrt{g_{\mu\nu}(x)dx^{\mu}dx^{\nu}}$$

Wir benötigen also die Metrik in der Nähe des Schwarzen Loches. Jetzt müssen wir noch ein paar zusätzliche Annahmen machen:

- Das Raumschiff ist hinreichend klein, d.h. alle Uhren im Raumschiff zeigen die selbe Zeit an. (Wir wollen nicht noch in eine Diskussion über die internen Probleme der Besatzung verwickelt werden!)
- Das Raumschiff ruht im Gravitationsfeld, d.h. $dx^i/dt = 0$.
- Das Feld ist isotrop, was üblicherweise vorausgesetzt wird (aber *nicht* notwendig ist; das Schwarze Loch könnte z.B. rotieren).
- Das Feld ist statisch, was für den Außenraum eigentlich schon aus der Isotropie folgt (Birkhoff-Theorem).

Vor allem die beiden letzten Punkte sind zunächst von Interesse, denn sie erlauben die Anwendung der Schwarzschildmetrik (SM):

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}(x)dx^{\mu}dx^{\nu} \\ &= \left(1 - \frac{2a}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2a}{r}\right)} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \end{aligned}$$

Dabei ist:

$$x^\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, r, \theta, \phi)$$

Die Winkelkoordinaten sind hier nicht von Interesse. Bei der Koordinate $x_1 = r$ ist allerdings Vorsicht geboten, da sie *nicht* direkt Abstände mißt, also nicht der Koordinate r in den Kugelkoordinaten des euklidischen Raums entspricht. Um Abstände zu bestimmen, muß man immer von der Metrik ausgehen. (Das ist ja gerade deren Bedeutung.) Allerdings ist das für die Abschätzungen, die wir vornehmen werden, auch nicht von Interesse. In der Koordinate $x_0 = ct$ ist t die Eigenzeit einer im Unendlichen ruhenden Uhr.

Wenn das Raumschiff im Gravitationsfeld ruht, also $dx^i/dt = 0$, erhalten wir für das Eigenzeitintervall:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}} = \sqrt{g_{00}(x)\left(\frac{dt}{dt}\right)^2} = \sqrt{g_{00}(x)} \\ \Rightarrow \quad d\tau &= \sqrt{g_{00}(x)}dt \end{aligned}$$

Da das Gravitationsfeld — und damit auch die Metrik — statisch ist, ist die Integration trivial (man traut sich ja kaum es so zu nennen), und wir erhalten:

$$\Delta\tau = \sqrt{g_{00}(x)}\Delta t$$

In unserem Fall wurde $\Delta\tau = 1$ Monat und $\Delta t = 12000$ Jahre vorgegeben. Wir setzen nun $g_{00}(r)$ aus der SM ein und erhalten:

$$\frac{1}{144000} = \sqrt{\left(1 - \frac{2a}{r}\right)}$$

Wobei:

$$r_s = 2a = \frac{2GM}{c^2}$$

Hierbei ist r_s der Schwarzschildradius, G die Gravitationskonstante und M die Masse des Schwarzen Loches.

Wenn wir nun nach r, also der Position des Raumschiffs, auflösen erhalten wir:

$$r = \frac{2GM}{c^2}\left(\frac{144000^2}{144000^2 - 1}\right) \simeq r_s$$

Wir haben also gezeigt, daß wir bei allen zukünftigen Berechnungen davon ausgehen können, daß das Raumschiff sich direkt am Ereignishorizont befindet.

Das Rumhängen

Wie es der Besatzung dabei ergeht, hängt von der Masse des Schwarzen Loches ab. Je größer M ist, desto kleiner sind die Gezeitenkräfte im Abstand $r \simeq r_s$. Es geht nun also darum herauszufinden, ob die Existenz eines Schwarzen Loches hinreichender Masse plausibel ist. Dazu ist es notwendig

- eine obere Grenze für die Gezeitenkräfte festzulegen, um die Mindestmasse des Schwarzen Loches zu finden,
- die kritische Dichte für diese Masse abzuschätzen (d.h. die Dichte, ab der der Radius der Massenverteilung kleiner als r_s ist).

Für die Gravitationsbeschleunigung gilt $g \sim GM/r^2$. Ihre Änderung über die Strecke Δl ergibt sich dann zu $\Delta g \sim (GM/r^3)\Delta l$. Für $r \simeq r_s$ ergibt sich dann[1]:

$$\Delta g \sim \frac{c^2 \Delta l}{2r_s^2} \tag{1}$$

Für ein Schwarzes Loch mit der Masse der Sonne ($M \simeq M_\odot$) und eine typischen Körpergröße ($\Delta l \simeq 2\,m$) ergibt sich damit:

$$\Delta g \sim 10^{11}\,\frac{m}{s^2}$$

Das ist ganz offensichtlich *sehr* ungesund!

Wir nehmen mal zugunsten der SF-Autoren an, daß die Raumfahrer ziemlich lasche Typen (also keine Klingonen) sind und nur Gezeitenkräfte aushalten, die der Erdbeschleunigung entsprechen; also $\Delta g \simeq 10 m/s^2$. Wenn wir die Astronauten ($m \simeq 70\,kg$) als Hantel annähern, entspricht das ungefähr der Situation auf der Erde mit $35\,kg$ an den Füßen an einer Reckstange zu hängen. Das scheint erträglich.

Wenn wir Gleichung (1) nach M auflösen, erhalten wir für die Masse des Schwarzen Loches:

$$M \simeq 10^5 M_\odot$$

Und für seinen Schwarzschildradius:

$$r_s \simeq 3 \cdot 10^8\,m$$

Es stellt sich jetzt nur noch die Frage, ob ein Schwarzes Loch dieser Masse plausiblerweise existieren könnte.

Betrachten wir zunächst ein "normales" Schwarzes Loch; z.B. im Zentrum einer aktiven Galaxis. Eine typische Galaxis enthält ca. 10^{10} Sterne, und da die Sonne ein ziemlich typischer Stern ist, müßten — wenn das Loch in der Vergangenheit aus einem Sternkollaps entstanden ist — im Laufe der Zeit ca. 10^5 Sterne in das Loch gestürzt sein. Das sind gerade mal 0.001% der Sterne in der Galaxis. So ein Objekt wäre also denkbar.

Wenn wir die kritische Dichte unseres Loches berechnen, finden wir:

$$\rho_{\mathrm{kr}} \simeq 2 \cdot 10^6\,\frac{g}{cm^3}$$

Das erlaubt theoretisch auch einen relativistischen Neutronensterncluster ($M_N \simeq M_\odot$, $\rho_N \simeq 10^{15}\,g/cm^3$) mit einem mittleren Abstand der Neutronensterne von $d \simeq 5 \cdot 10^6\,m$. Das ist wohl ein eher kurioses Objekt!

Literatur

1. Fließbach, Torsten; *Allgemeine Relativitätstheorie, Kap. 55*; 2., überarb. Aufl.; 1995; Spektrum Akadem. Verl.; ISBN 3-86025-685-8

[1] Daß wir hier nur Proportionalitäten angeben können (wir würden sonst den Rahmen dieser kleinen Bemerkung sprengen), liegt daran, daß die Koordinate r eben *kein* direktes Maß für Abstände ist. Das stört aber nicht, da wir nur an einer Abschätzung der Größenordnung interessiert sind.